www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Les parties I, II et IV sont indépendantes l'une de l'autre. La partie III fait appel à des résultats des deux premières parties.

Notations.

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de [0,1] dans **R**. On utilisera sur E la norme

$$N_1(u) = \int_0^1 |u(x)|\, dx$$

Soit $u \in E$ et $(u_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de E ; on dira que u_n tend *vaguement* vers u quand $n \to +\infty$ si pour toute fonction $\phi \in E$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u_n(x)\,\phi(x)\,dx = \int_0^1 u(x)\,\phi(x)\,dx$.

PARTIE I

1°) Soit $u \in E$ et $(u_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de E, tels que $N_1(u_n - u) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Montrer que u_n tend vers u quand $n \to +\infty$.

2°) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue périodique de période 1. On définit $u_n \in E$ par $u_n(x) = f(nx)$, $\forall x \in [0,1]$

a) Etant donné une fonction $\phi \in E$, et $n \in \mathbf{N}^*$, montrer l'égalité

$$\int_0^1 u_n(x)\,\phi(x)\,dx = \int_0^1 f(y)\,\Theta_n(y)\,dy, \qquad \text{où} \qquad \Theta_n(y) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \phi((y+k)/n), \text{ pour } y \in [0,1]$$

b) En déduire que u_n tend vaguement vers une fonction constante lorsque $n \to +\infty$.
Quelle est cette constante ?

c) Même question qu'en b) lorsque la période de f n'est plus égale à 1.

3°) Montrer par un exemple qu'on peut avoir simultanément les deux propriétés
i) u_n tend vaguement vers u quand $n \to +\infty$.
ii) $\lim_{n\to+\infty} N_1(u_n - u) \neq 0$

PARTIE II

1°) a) Soit $p_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $p_n(t) = \sqrt{t^2 + n^{-2}} - n^{-1}$ pour $t \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$.

Vérifier que $p_n(t) \to |t|$ quand $n \to +\infty$, uniformément sur **R**.

b) En déduire que si $u \in E$, il existe $\phi \in E$ vérifiant

$$\text{Sup}\{|\phi(x)| ; x \in [0,1]\} \le 1, \int_0^1 u(x)\,\phi(x)\,dx \ge \frac{1}{2} N_1(u).$$

2°) Soit $(v_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de E. Pour chaque $n \in \mathbf{N}$, on choisit $\phi_n \in E$ tel que

$$\text{Sup}\{|\phi_n(x)| ; x \in [0,1]\} \le 1, \int_0^1 v_n(x)\,\phi_n(x)\,dx \ge \frac{1}{2} N_1(v_n)$$

Pour toute suite $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in N}$ à valeurs dans {-1, 1}, on définit $\psi_\varepsilon(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n 4^{-n} \phi_n(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Tournez la page S.V.P.

a) Pour une telle suite ε, montrer que la formule ci-dessus définit un élément ψ_ε de E, et établir l'inégalité

$$\left| \int_0^1 v_0(x)\, \psi_\varepsilon(x)\, dx \right| \geq \frac{1}{6} N_1(v_0).$$

b) Constuire par récurrence sur n les éléments $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ d'une suite ε telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\left| \int_0^1 v_n(x)\, \psi_\varepsilon(x)\, dx \right| \geq \frac{1}{6} 4^{-n} N_1(v_n).$$

3°) Soit $u \in E$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E, qui tend vaguement vers u quand $n \to +\infty$.

a) En appliquant la question précédente, montrer que la suite $(N_1(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

b) Soit $w \in E$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge uniformément vers w quand $n \to +\infty$. Montrer que $u_n w_n$ tend vaguement vers uw quand $n \to +\infty$.

PARTIE III

1°) Soit $a : [0, 1] \to]0, +\infty[$ une fonction continue, de classe C^1 sur $]0, 1[$, et $f \in E$. Démontrer l'existence et l'unicité d'une fonction $u \in E$ satisfaisant les conditions suivantes :

$$P(a, f) \quad \begin{cases} u \text{ est de classe } C^2 \text{ sur }]0, 1[\\ \dfrac{d}{dx}\left(a(x) \dfrac{du}{dx}(x)\right) = f(x), \ \forall x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

2°) Soit $G : \mathbf{R} \to]0, +\infty[$ une fonction de classe C^1, périodique. Pour $n \in \mathbf{N}$, et pour $x \in [0,1]$, on pose $a_n(x) = G(nx)$.

Soit $f \in E$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E tels que $N_1(f_n - f) \to 0$ quand $n \to +\infty$. On note u_n la solution dans E du problème $P(a_n, f_n)$.

a) Montrer que pour $x \in [0, 1]$, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x f_n(t)\, dt = \int_0^x f(t)\, dt$, uniformément.

b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $u_n(x) \to u(x)$ quand $n \to +\infty$, où $u \in E$ est la solution d'un problème $P(A, f)$; la fonction $A : [0, 1] \to]0, +\infty[$ sera déterminée en fonction de G.

PARTIE IV

Soit $j : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ une fonction continue, satisfaisant $j(0) = 0$ et qui soit *strictement* convexe, c'est-à-dire :
pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $x \neq y$, et tout $t \in]0, 1[$, $j(tx + (1-t)y) < t\, j(x) + (1-t)\, j(y)$.

1°) Construire une fonction $\rho : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ de classe C^2 et vérifiant les conditions

$$\rho(x) = 0 \text{ pour } |x| \geq 1 \qquad \int_{-1}^1 \rho(x)\, dx = 1$$

2°) Montrer que j est décroissante sur $\mathbf{R}^-$, croissante sur $\mathbf{R}^+$.

Tournez la page S.V.P.

3°) a) Soit $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$. Montrer que la formule

$$j_p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} j\left(x - \frac{y}{p}\right) \rho(y - x)dy = \int_{-1}^{1} \rho(s)\, j\left(x - \frac{s + x}{p}\right)ds$$

définit sur $\mathbf{R}$ une fonction j_p strictement convexe et satisfaisant $j_p(x) \leq j(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x| \geq 1$.

b) Etablir que j_p est de classe C^2.

4°) Montrer que $j_p(x)$ tend vers $j(x)$ quand $p \to +\infty$, uniformément sur tout intervalle borné.

5°) On fixe deux nombres réels $a > 2$ et $0 < \eta < 1$.

Pour $x \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^+$ et $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$, on pose

$$F(x, b) = [j(x + b) + j(x - b)] / 2 - j(x)$$

$$F_p(x, b) = [j_p(x + b) + j_p(x - b)] / 2 - j_p(x)$$

a) Montrer qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, b) \in \mathbf{R}^2$:

$$\left(|x| \leq a + 1 \text{ et } \frac{\eta}{2} \leq b \leq \eta\right) \Rightarrow (F(x, b) \geq \alpha).$$

b) En déduire que pour $p \geq 2$ et $x \in \mathbf{R}$

$$(|x| \leq a) \Rightarrow (F_p(x, \eta) \geq \alpha).$$

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$ $\quad (|x| \leq a) \Rightarrow \left(\int_{x-\eta}^{x+\eta} j''_p(t)\,(\eta - |x - t|)dt \geq 2\alpha\right)$.

d) Etablir qu'il existe $\beta \in \mathbf{R}$, $\beta > 0$, dépendant seulement de α et non pas de p, tel que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$

$$(|x| \leq a - 1 \text{ et } |x - y| \geq 4\eta) \Rightarrow \left(\int_x^y j''_p(t)\,(y - t)dt \geq \beta |x - y|\right).$$

On pourra d'abord considérer le cas $x < y$ et vérifier que

$$\int_x^{x + 2\eta} j''_p(t)dt \geq \frac{2\alpha}{\eta}.$$

6°) Soit $u \in E$ et $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E, qui tend vaguement vers u quand $n \to +\infty$.

a) On suppose qu'il existe un nombre entier $p \geq 2$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 j_p(u_n(x))dx = \int_0^1 j_p(u(x))dx.$$

Montrer à l'aide de la question précédente que

$$N_1(u_n - u) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

b) On remplace l'hypothèse du a) par

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 j(u_n(x))dx = \int_0^1 j(u(x))dx.$$

Soit $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$

$$(|x| \leq a) \Rightarrow (j_p(y) - j_p(x) - j'_p(x)\,(y - x) \leq \delta + j(y) - j(x) - j'_p(x)\,(y - x))$$

En déduire que $N_1(u_n - u) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail